Date:
Subject:

خلاصه ریاضی عمومی ۲ جزوه ... وثوق پور - فرامرزی

فصل دوم ← توابع برداری یک متغیره

خم ← تابع برداری یک متغیره $f:[a,b]\to R^n\ (n\geq 2)$ را خم گوئیم هرگاه f روی $[a,b]$ پیوسته باشد.

بردار یکه مماس ← برداری که بر مسیر متحرک مماس است.
$$T=\frac{v(t)}{|v|}$$

بردار سرعت متحرک
$$\vec{v}(t)=R'(t)=(x'(t),\ y'(t),\ z'(t))$$

بردار قائم اول ← برداری که بر T عمود است و در جهت تقعر منحنی قرار دارد.
$$N=B\times T$$

بردار شتاب متحرک
$$\vec{a}(t)=v'(t)=R''(t)=(x''(t),\ y''(t),\ z''(t))$$

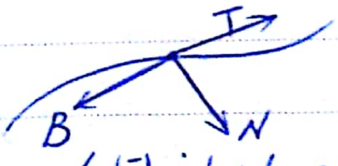
بردار قائم دوم ← برداری که بر T و N عمود است.
$$B=\frac{v(t)\times a(t)}{|v(t)\times a(t)|}$$

صفحه ی قائم ← صفحه ای است که بردار نرمال آن T و شامل N و B است.

صفحه ی بوسان ← صفحه ای است که بردار نرمال آن B و شامل T و N است.

صفحه ی مماس ← صفحه ای است که بردار نرمال آن N و شامل T و B است.

انحنا (خمیدگی) ← سرعت خمیده شدن مسیر متحرک (کاپا)
$$K=\frac{|v(t)\times a(t)|}{|v(t)|^3}$$



تاب (پیچش) ← میزان انحراف مسیر از صفحه ی بوسان (تاو)
$$\tau=\frac{(v(t)\times a(t))\cdot a'(t)}{|v(t)\times a(t)|^2}$$

دایره بوسان ← دایره ای است که بر منحنی مماس است و مرکز آن در جهت تقعر قرار دارد. شعاع دایره ی بوسان برابر با وارون انحنا است.
$$a=\frac{1}{K}$$

مرکز دایره ی بوسان نقطه ی $R(t_0)+aN(t_0)$ است.

دایره بوسان در خم دو بعدی تعریف می شود.

* معادله دایره به شعاع r و مرکز (α,β)
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

فصل سوم ← توابع عددی چند متغیره

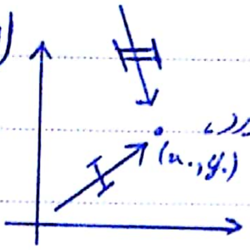
حد تابع دو متغیره ← جای گذاری x_0 و y_0 و حدگیری
اگر حاصل حد مبهم بود، با روش های زیر ثابت می کنیم حد وجود ندارد.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

۱ ← حدود مکرر: حدهای زیر را محاسبه می کنیم و اگر برابر نباشند، تابع در آن نقطه حد ندارد.

$$\begin{cases} \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) \\ \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \end{cases}$$

۲ ← مسیریابی: حد را روی دو مسیر متفاوت که از نقطه (x_0, y_0) می گذرد، بررسی می کنیم اگر برابر نباشند، تابع در آن نقطه حد ندارد.



۳ ← مختصات قطبی: x و y را برحسب مختصات قطبی جای گذاری می کنیم سپس حد تابع را وقتی $r \to 0$ محاسبه می کنیم. اگر حد تابع برحسب θ به دست آید، تابع در آن نقطه حد ندارد.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

پیوستگی ← حد تابع در نقطه (x_0, y_0) وجود داشته باشد و با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

مشتق جزئی یا نسبی ← مشتق یک تابع چند متغیره نسبت به یکی از متغیرها در حالی که باقی متغیرها را ثابت در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

قاعده زنجیری ← اگر $Z = f(x, y)$ تابعی از دو متغیر x و y باشد، در حالی که x و y خود تابعی از متغیرهای s و r باشند، پس Z تابعی از r، s است.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

Scanned by CamScanner

Date:
Subject:

مشتق تابع ضمنی ← اگر Z تابعی از دو متغیر x و y باشد که با رابطه $F(x,y,Z)=0$ تعریف شده است. یعنی ضابطه‌ی Z بر حسب x و y مشخص نیست، در این صورت گوئیم Z تابعی ضمنی از x و y است.

$$Z_x = \frac{-F_x}{F_Z}$$

$$Z_y = \frac{-F_y}{F_Z}$$

ژاکوبین ← اگر $F(u,v)$ و $G(u,v)$ دو تابع از متغیر u و v باشند، ژاکوبین F و G نسبت به u و v به صورت زیر است.

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix}$$

اگر سه تابع F و G و H و سه متغیر u و v و w داشته باشیم،

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)} = \begin{bmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{bmatrix}$$

ژاکوبین و تابع ضمنی ← اگر دو تابع ضمنی و دو معادله داشته باشیم، از ژاکوبین استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم u و v دو تابع ضمنی بر حسب x و y باشند که با رابطه‌های $G(x,y,u,v)=0$ ، $F(x,y,u,v)=0$ تعریف شده‌اند

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

قضیه ژاکوبین ← اگر $u=f(x,y)$ ، $v=g(x,y)$ ، آنگاه $F(u,v)=0$ ؛ اگر و تنها

اگر $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$ $\quad F(u,v)=0 \leftrightarrow$ $\quad \rightarrow u_x \cdot v_y = u_y \cdot v_x$

Scanned by CamScanner

بردار عملگر نابلا

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

دیورژانس F

$$\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z} \qquad div\vec{F}=\vec{\nabla}.\vec{F}$$

کرل F

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}= \qquad Curl\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}$$

$$=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

بردار گرادیان

$$f(x,y,z)$$

$$\rightarrow \nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

مشتق جهتی

$$D_u f=\nabla f.\vec{u}$$ (u بردار یکه است)

$$\lim_{\substack{P\to P_0 \\ \text{در جهت } u}}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{|P_0P|}$$

$$\begin{cases} \min D_u f=-|\nabla f| \\ \max D_u f=|\nabla f| \end{cases}$$

کاربردهای بردار گرادیان

۱ ← صفحه مماس و خط عمود بر رویه
۲ ← خط مماس و صفحه عمود بر تقاطع دو رویه
۳ ← نقاط بحرانی و اکسترمم

۱ ← صفحه مماس و خط عمود بر رویه

∇f برابر است با بردار نرمال صفحه:

$A_0=(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای در صفحه

$N=\nabla f=(a,b,c)$ بردار هادی خط عمود بر رویه + بردار نرمال صفحه مماس بر رویه

معادله صفحه مماس بر رویه:

معادله صفحه → $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

معادله خط قائم:

$$L:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

Scanned by CamScanner

۲ ← خط مماس و صفحه قائم بر تقاطع دو رویه

$$F(x,y,z)=0$$
$$G(x,y,z)=0$$

اگر خم C محل تلاقی دو رویه F و G باشند،

∇F و ∇G عمود بر C هستند.

$\nabla F \times \nabla G$ بردار هادی خط مماس بر منحنی C

و بردار نرمال صفحه قائم بر منحنی است

نقاط بحرانی توابع چند متغیره ← نقاطی که در آن ها بردار گرادیان صفر باشد یا موجود نباشد

۳ ← نقاط بحرانی و اکسترمم های نسبی

$$\Delta = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

بردار گرادیان را تشکیل داده و برابر با صفر قرار می دهیم

$f_x=0$ و $f_y=0$ نقاط بحرانی هستند

$$\begin{cases} \Delta<0 \rightarrow \text{نقطه بحرانی زین اسبی} \\ \Delta>0 \wedge f_{xx}>0 \rightarrow \text{نقطه min نسبی} \\ \Delta>0 \wedge f_{xx}<0 \rightarrow \text{نقطه ماکزیمم نسبی} \end{cases}$$

اکسترمم مشروط از روش ضرایب لاگرانژ

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

در اکسترمم مشروط باید نقاطی را پیدا کنیم که در $g(x,y)=0$ (شرط مسئله) صدق کند

پس از حل $\nabla f = \lambda \nabla g$ ، x، y را بر حسب λ به دست می آوریم.

پس x و y را در $g(x,y)=0$ جای گذاری می کنیم

← x و y به دست آمده نقاط اکسترمم مشروطند

رویه ← هر سطح در فضای سه بعدی

حالت استاندارد

$$ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g=0$$

انواع رویه

۱ ← کره

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

کره به مرکز (α,β,γ) و شعاع R

حجم $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

۲ ← بیضی وار

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$

بیضی به مرکز (α,β,γ)

$$\begin{cases} \text{تقاطع با محور x ها} = \pm a \\ \text{تقاطع با محور y ها} = \pm b \\ \text{تقاطع با محور z ها} = \pm c \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

3- هذلولی وار استاندارد $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

محور هذلولی وار در جهت متغیری است که علامت منفی دارد. در این جا محور z ها

محور هذلولی وار دوپارچه در جهت متغیری است که علامت + دارد

هذلولی وار در حالت کلی

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=\pm1$$

اگر سمت راست تساوی 1+ باشد، هذلولی وار یک پارچه در جهت z ها و اگر 1- باشد، هذلولی وار دوپارچه است.

4- مخروط

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}$$

مخروط استاندارد $x^2+y^2=z^2$

5- سهمی وار

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=\frac{z-\gamma}{c}$$

سهمی وار استاندارد $z=y^2+x^2$

اگر $c>0$ جهت تقعر به سمت بالا و اگر $c<0$ جهت تقعر به سمت پایین است.

جهت سهمی وار در جهت متغیری است که توان یک دارد.

6- زین اسبی

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=\frac{z-\gamma}{c}$$

زین اسبی استاندارد $x^2-y^2=z$

جهت زین اسبی در جهت متغیری که منفی دارد است

7- استوانه

اگر در یک استوانه یکی از متغیرها ظاهر نشده باشد، متغیر استوانه است

استوانه سهمی وار $z=x^2$

استوانه بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

اگر x^2 و y^2 و z^2 داشته باشیم ← کره، بیضی وار، هذلولی وار، مخروط

اگر یکی از متغیرها با توان یک باشد ← سهمی وار، زین اسبی

اگر یک متغیر نداشته باشیم ← استوانه

Scanned by CamScanner

انتگرال دوگانه

$$\iint_D f(x,y).dA \quad , \quad dA = dx.dy \ \vee \ dA = dy.dx$$

$D \rightarrow$ ناحیه انتگرال گیری دوگانه

اگر $dA = dy.dx$ بود، ابتدا انتگرال تابع را نسبت به y بدست می آوریم و x را ثابت در نظر می گیریم.

← محدوده ی بیرونی ترین انتگرال حتما باید عدد ثابت باشد.

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

دو متغیر $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ را تعریف می کنیم

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

$$dA = |J| du.dv$$

تغییر متغیر قطبی

در این تغییر متغیر x و y به r و θ تبدیل می شوند

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases} \rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad dA = r.dr.d\theta$$

← مخصوص سوال هایی که دایره یا $x^2 + y^2$ داریم

تغییر متغیر بیضوی

تعمیم تغییر متغیر قطبی

$$\begin{cases} x = a.r.\cos\theta \\ y = b.r.\sin\theta \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightarrow dA = a.b.r.dr.d\theta$$

← مخصوص سوال هایی بیضی داریم

محاسبه مساحت یک ناحیه

$$\iint_D dA = A$$

← مساحت ناحیه D

Scanned by CamScanner

Subject: ______

انتگرال سه گانه

$$\iiint_R f(x,y,z)\,.dv \qquad dv = dz\,dy\,.dx$$

$R \rightarrow$ ناحیه انتگرال گیری سه بعدی $\equiv R$

مشخص کردن محدوده ی انتگرال

۱ـ محدوده ی Z: خط هایی موازی محور Z رسم می کنیم تا از پایین و بالای بر حسب Z به دست آید

۲ـ محدوده ی دو متغیر: ناحیه ی سه بعدی را روی صفحه ی xoy تصویر می کنیم. برای این منظور Z را از معادله ی ها حذف می کنیم

محاسبه ی حجم یک جسم

$$\iiint_R dv = V$$

حجم ناحیه R

محاسبه ی جرم یک جسم

$$M = \iiint_R \sigma\,.dv$$

جرم ناحیه R با چگالی $\sigma(x,y,z)$

تغییر متغیر های انتگرال سه گانه ← استوانه ای ـ کروی ـ بیضوی ـ دکارتی

تغییر متغیر استوانه ای

x, y به r, θ تبدیل می شوند اما Z بدون تغییر

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \\ z = z \end{cases} \rightarrow J = r \rightarrow dv = r.dz.dr.d\theta$$

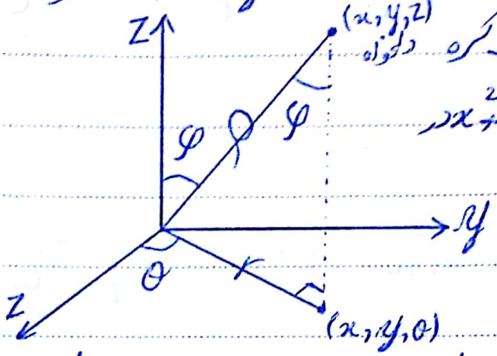
← در انتگرال هایی محدوده ی انتگرال ها همگی عدد ثابت باشند، می توان انتگرال دوگانه را به صورت ضرب دو عدد انتگرال یگانه نوشت

← تغییر متغیر استوانه ای هنگامی استفاده می شود که ناحیه انتگرال بخشی از استوانه باشد یا $y^2 + x^2$ در انتگرال ظاهر شده باشد

تغییر متغیر کروی

برای هنگامی که ناحیه مختص از یک کره یا مخروط باشد یا عبارت $x^2+y^2+z^2$ در انتگرال باشد.

$$\begin{cases} x=\rho\,\text{Sin}\,\varphi.\text{Cos}\,\theta \\ y=\rho.\text{Sin}\,\varphi.\text{Sin}\,\theta \\ Z=\rho.\text{Cos}\,\varphi \end{cases} \longrightarrow \rho=\sqrt{x^2+y^2+Z^2}$$



$\rho \equiv$ فاصله نقطه (x,y,z) تا مبدأ

$\varphi \equiv$ زاویه بین شعاع ρ و محور Z های مثبت

$\theta \equiv$ زاویه بین محورهای مثبت و شعاع r

$$j=\rho^2.\text{Sin} \longrightarrow dv=\rho^2.\text{Sin}\,\varphi.d\rho.d\theta$$

پیدا کردن محدوده ها

محدوده ی ρ: شعاع هایی از مبدا به سمت بیرون رسم می کنیم

محدوده ی φ: شعاع هایی از روی محور Z های مثبت به سمت بیرون دوران می دهیم.

محدوده ی θ: ناحیه را روی صفحه ی xoy تصویر می کنیم و ادامه را مانند مختصات قطبی عمل می کنیم.

تغییر متغیر بیضوی

تعمیمی از تغییر متغیر کروی

فرض می کنیم ناحیه R مختص از بیضی وار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ باشد.

$$\begin{cases} x=a.\rho.\text{Sin}\,\varphi.\text{Cos}\,\theta \\ y=b.\rho.\text{Sin}\,\varphi.\text{Sin}\,\theta \\ Z=c.\rho.\text{Cos}\,\varphi \end{cases}$$

$$j=abc\rho^2\text{Sin}\,\varphi$$

$$\longrightarrow dv=abc\rho^2\text{Sin}\,\varphi.d\rho.d\varphi.d\theta$$

Scanned by CamScanner

Date:
Subject:

انتگرال روی خم: ۱. انتگرال تابع عددی روی خم ۲. انتگرال تابع برداری روی خم

۱- انتگرال تابع عددی روی خم

$$\int_C f(x,y,z).ds$$

- ابتدا خم را به صورت پارامتری می نویسیم

$$C: x(t)i + y(t)j + z(t)k = (x(t), y(t), z(t))$$

- ds یا المان خم (طول) را از رابطه زیر به دست می آوریم

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,.dt$$

معادله پارامتری دایره ی $x^2 + y^2 = a^2$

$$\begin{cases} x = a.\cos t \\ y = a.\sin t \end{cases}, \quad 0 \leqslant t < 2\pi$$

معادله پارامتری دایره به مرکز $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2$

$$\begin{cases} x = \alpha + a.\cos t \\ y = \beta + a.\sin t \end{cases}, \quad 0 \leqslant t < 2\pi$$

معادله پارامتری بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\begin{cases} x = a.\cos t \\ y = b.\sin t \end{cases}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

۲- انتگرال تابع برداری روی خم

$$\int_C \vec{F}.d\vec{R}$$

$\rightarrow F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = (P, Q, R)$

$\rightarrow R(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k = (x(t), y(t), z(t))$

$\rightarrow dR = (dx, dy, dz)$

$$\rightarrow \int_C F.dR = \int P.dx + Q\,dy + R.dz$$

- ابتدا خم را پارامتری می کنیم
سپس dR را محاسبه می کنیم، جای گذاری می کنیم

$\int_C F.dR$ ← کار انجام شده توسط نیروی F در مسیر C را محاسبه می کند. آن را گردش میدان می گویند

قضیه گرین

اگر D یک ناحیه 2بعدی روی صفحه xoy و C، خم بسته ی ناحیه D باشد،

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

میدان های برداری پایستار

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

اگر F یک میدان برداری باشد، F را پایستار گوییم هرگاه $\operatorname{curl}\vec{F} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

اگر میدان F، میدانی پایستار باشد، تابع عددی f وجود دارد به طوری که

$$\nabla f = F$$

به f تابع پتانسیل F گوییم

اگر F یک میدان پایستار باشد، $\int_C F.dR$ به مسیر C بستگی ندارد و فقط به نقاط انتهای مسیر بستگی دارد

$$\int_A^B F.dR = f(B) - f(A)$$

f همان تابع پتانسیل است.

اگر F پایستار باشد ←

$$\oint_C F.dR = 0$$

انتگرال روی سطح (انتگرال رویه‌ای)

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma$$

- اگر S یک رویه محدود با معادله $g(x,y,z)=0$ باشد

حل انتگرال رویه‌ای

- الان دیفرانسیل $d\sigma$ را از رابطه زیر به دست می‌آوریم

$$d\sigma = \frac{|\vec{\nabla} g|}{|g_z|}\,dA$$

$$\nabla g = (g_x, g_y, g_z) \longrightarrow |\nabla g| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}$$

- رویه محدود S را بر صفحه xoy تصویر می‌کنیم (Z را از معادله رویه حذف می‌کنیم.)

- $d\sigma$ را در انتگرال جای‌گذاری می‌کنیم. اگر در انتگرال Z ظاهر شده باشد، Z را از معادله $g(x,y,z)=0$ برحسب x و y به دست می‌آوریم و در انتگرال جای‌گذاری می‌کنیم

مساحت یک رویه

مساحت رویه‌ی S

$$\sigma = \iint_S d\sigma$$

شار گذرنده از یک رویه

$$\iint (\vec{F}\cdot\vec{n})\,d\sigma$$

n بردار یکه عمود بر رویه S است

F میدان برداری و S یک رویه سه‌بعدی

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|}$$

محاسبه‌ی شار

- ابتدا $\vec{n}\,\sigma$ را محاسبه می‌کنیم

$$\vec{n}\,d\sigma = \pm\frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|}\cdot\frac{|\vec{\nabla} g|}{|g_z|}\,dA = \pm\frac{\vec{\nabla} g}{|g_z|}\,dA$$

- پس ضرب داخلی $\vec{F}.n\,d\sigma$ را محاسبه می‌کنیم

- ادامه را مانند انتگرال روی سطح ادامه می‌دهیم

Scanned by CamScanner

Date:

Subject:

قضیه دیورژانس (واگرایی)

$$\iint_S (\vec{F}.\vec{n})\, d\sigma = \iiint_R (div\, \vec{F})\, dv$$

$$\begin{cases} div\, \vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \\ F = Pi + Qj + Rk \end{cases}$$

قضیه استوکس

اگر S یک رویه ی محدود باشد که از اطراف به منحنی C محدود شده است یعنی منحنی C مرز رویه ی S است.

$$\oint_C F.dR = \iint_S curl\, \vec{F}.\vec{n}.d\sigma$$

تهیه و تنظیم: نسترن برندکام

Scanned by CamScanner